

EERSTE KAMERVERKIEZINGEN



JACOB JAN PAULUS & JAAP PRAAGMAN

De Eerste Kamer wordt gekozen via een getrapte verkiezing, de burgers kiezen Provinciale Statenleden die vervolgens de Eerste Kamerleden kiezen. Begin maart 2011 waren de verkiezingen voor de Provinciale Staten en door de vraag of de gedoogcoalitie een meerderheid zal halen is er dit jaar veel aandacht voor de Eerste Kamerverkiezing. In de landelijke media is er veel gespeculeerd over strategisch stemmen [1,2]. Want door strategische samenwerking kunnen partijen meer Kamerzetels halen. Tijd voor een wiskundige analyse.

Spelregels

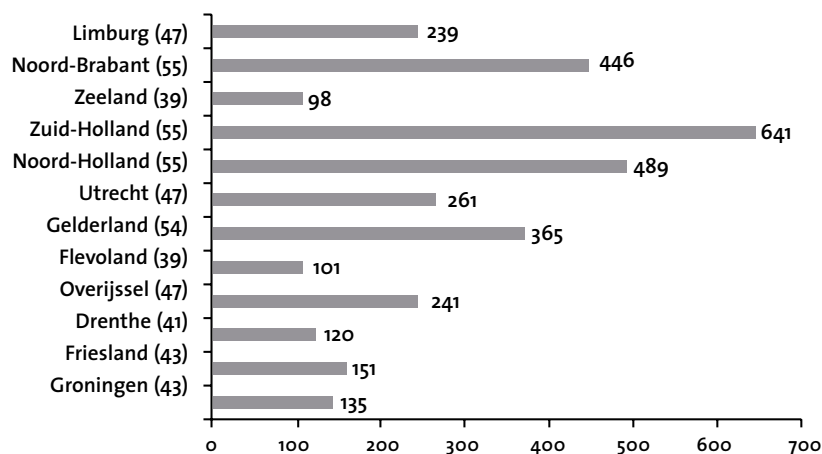
Bij de Eerste Kamer verkiezing op 23 mei 2011 mag elk Statenlid één stem uitbrengen. Omdat het inwoneraantal per provincie verschilt, worden de stemmen gewogen. Deze weging, de zogenaamde *stemwaarde*, wordt per provincie bepaald door het inwoner aantal te delen door het honderdvoud van het aantal Statenleden in die provincie. De stemwaarde en het aantal Statenleden per pro-

vincie staan in figuur 1 weergegeven.

De totale waarde van de stemmen uitgebracht op een partij is het behaalde *stemcijfer* van die partij. De stemcijfers bepalen de zetelverdeling in de Eerste Kamer en dat gaat als volgt [3,4]. Met de kiesdeler worden de zogenaamde kale zetels verdeeld. Het aantal kale zetels dat een partij krijgt is gelijk aan het naar beneden afgeronde quotiënt van stemcijfer en kiesdeler. Deze kiesdeler is de som van de stemcijfers gedeeld door het aantal Kamerzetels. In 2011 is de kiesdeler $166561/75$. De resterende zetels worden vervolgens één voor één verdeeld zodanig dat de eerstvolgende restzetel wordt toegekend aan die partij waarvoor na toekenning van die zetel het quotiënt van stemcijfer en aantal zetels het grootste is.

Verkiezingen 2011

In tabel 1 staat per provincie de zetelverdeling van de Provinciale Staten na de verkiezing van maart 2011. Stemt ieder Statenlid bij de Eerste Kamer-



Figuur 1. Provincie (aantal statenleden) en stemwaarde

verkiezing op de eigen partij dan resulteert dat in de stemcijfers zoals vermeld in de voorlaatste kolom. Delen door de kiesdeler en naar beneden afronden levert het aantal kale zetels in de laatste kolom. (De lokale partijen zijn gebundeld in de

Onafhankelijke Senaats Fractie, OSF.)

In totaal zijn daarmee 69 zetels verdeeld. De resterende 6 zetels worden één voor één verdeeld volgens het hiervoor beschreven principe van grootste gemiddelde stemcijfer per zetel, zie tabel 2.

	GR	FR	DR	OV	FL	GD	UT	NH	ZH	ZL	NB	LB	Stem-cijfer	Kale zetels
CDA	5	8	6	11	4	9	6	5	6	6	10	10	24238	10
VVD	6	6	9	8	9	11	11	13	12	7	12	8	34518	15
PVV	3	4	4	4	6	6	5	6	8	5	8	10	21064	9
PvdA	12	11	12	9	6	9	7	11	10	7	7	6	29639	13
GroenLinks	3	2	2	2	2	4	4	5	3	1	3	3	10656	4
D66	3	2	2	3	3	4	5	6	5	2	5	2	13781	6
SP	6	3	4	4	3	5	4	5	5	3	8	6	16825	7
ChristenUnie	3	3	2	3	3	3	2	1	2	2			5708	2
SGP				2	1	2	1		2	4			3248	1
PvdD	1				1	1	1	1	1		1		2438	1
50PLUS				1	1	1	1	1	1		1	2	3022	1
OSF	1	4						1		2			1424	0
													166561	69

Tabel 1. Zetelverdeling van de Provinciale Staten na de verkiezing van maart 2011

Rekenen

Interessant wordt het doordat de Statenleden in principe vrij zijn in hun keuze en dus ook op een andere partij mogen stemmen. Dat biedt de mogelijkheid om afspraken te maken tussen samenwerkende partijen en zo de zetelverdeling te beïnvloeden. Al begin april was er sprake van een mogelijke afspraak tussen 50PLUS en de OSF. Als bijvoorbeeld alle OSF stemmen terecht komen bij de 50PLUS partij, dan krijgt de 50PLUS partij een stemcijfer van $3022+1424 = 4446$. Wat direct twee kale zetels oplevert in plaats van één. Dit ten koste van de SP, omdat er dan nog maar vijf restzetel te verdelen zijn. Maar met een kleine verhoging van het stemcijfer, bijvoorbeeld doordat een Zeeuws GroenLinks Statenlid zijn stem aan de SP geeft, kan de SP voorbij de PVV schuiven. Wat vervolgens voor de gedoogcoalitie CDA, VVD en PVV weer

aanleiding kan zijn om een defensieve strategie te zoeken, et cetera. Dit vraagt om een wiskundige analyse naar de strategische stemmogelijkheden.

Geen vaste kiesdeler

Vanuit wiskundig perspectief is het werken met de kiesdeler en vervolgens één voor één verdelen van de restzetels onnodig ingewikkeld. Waar het in wezen om gaat is het stemcijfer per verdeelde zetel. In het eerder genoemde voorbeeld, waar iedere partij op zichzelf stemt, krijgt de SP de laatste restzetel met een stemcijfer van 2103,13 per zetel. Iedere toegewezen zetel representeert dus een stemcijfer van 2103,13 of meer. Omgekeerd geldt dat iedere partij ook voor elke 2103,13 aan stemcijfer een zetel toegewezen heeft gekregen. Kortom de uiteindelijke zetelverdeling correspondeert met de zetel-

	Stemcijfer/ (zetels +1)	Zetels	Stemcijfer/ (zetels +1)	Zetels	Stemcijfer/ (zetels +1)	Zetels	Stemcijfer/ (zetels +1)	Zetels	Stemcijfer/ (zetels +1)	Zetels	Stemcijfer/ (zetels +1)	Zetels
CDA	2203,45	11	2019,83	11	2019,83	11	2019,83	11	2019,83	11	2019,83	11
VVD	2157,38	15	2157,38	16	2030,47	16	2030,47	16	2030,47	16	2030,47	16
PVV	2106,40	9	2106,40	9	2106,40	9	2106,40	9	2106,40	10	1914,91	10
PvdA	2117,07	13	2117,07	13	2117,07	13	2117,07	14	1975,93	14	1975,93	14
GroenLinks	2131,20	4	2131,20	4	2131,20	5	1776,00	5	1776,00	5	1776,00	5
D66	1968,71	6	1968,71	6	1968,71	6	1968,71	6	1968,71	6	1968,71	6
SP	2103,13	7	2103,13	7	2103,13	7	2103,13	7	2103,13	7	2103,13	8
ChristenUnie	1902,67	2	1902,67	2	1902,67	2	1902,67	2	1902,67	2	1902,67	2
SGP	1624,00	1	1624,00	1	1624,00	1	1624,00	1	1624,00	1	1624,00	1
PvdD	1219,00	1	1219,00	1	1219,00	1	1219,00	1	1219,00	1	1219,00	1
50PLUS	1511,00	1	1511,00	1	1511,00	1	1511,00	1	1511,00	1	1511,00	1
OSF	1424,00	0	1424,00	0	1424,00	0	1424,00	0	1424,00	0	1424,00	0
		70		71		72		73		74		75

Tabel 2. Verdeling van de restzetels in de Eerste Kamer na de Provinciale Statenverkiezing van maart 2011

verdeling die we krijgen als we 2103,13 als kiesdeler hanteren. Het hele proces van berekenen van kale zetels en toekennen van restzetels kunnen we dus vervangen door het kiezen van de deler waarbij precies 75 zetels worden verdeeld. Probleem is echter dat deze feitelijk resulterende deler van tevoren onbekend is en afhankelijk van het stemgedrag.

In figuur 2 lichten we dit op een iets andere manier toe, waar het aantal aan een partij toe te wijzen zetels is uitgezet tegen de deler. Weer voor de situatie dat alle Statenleden op hun eigen partij stemmen. De partijen zijn gegroepeerd als coalitie (CDA, VVD en PVV) en oppositie (alle andere partijen). Bij de groene lijn, de officiële kiesdeler, zijn 34 zetels aan de coalitie toegekend en 35 aan de oppositie. Door de deler lager te kiezen dan de kiesdeler, worden er meer zetels verdeeld. Het proces van restzetelverdeling komt dus overeen met het naar links verschuiven van de deler totdat er precies 75 zetels zijn verdeeld.

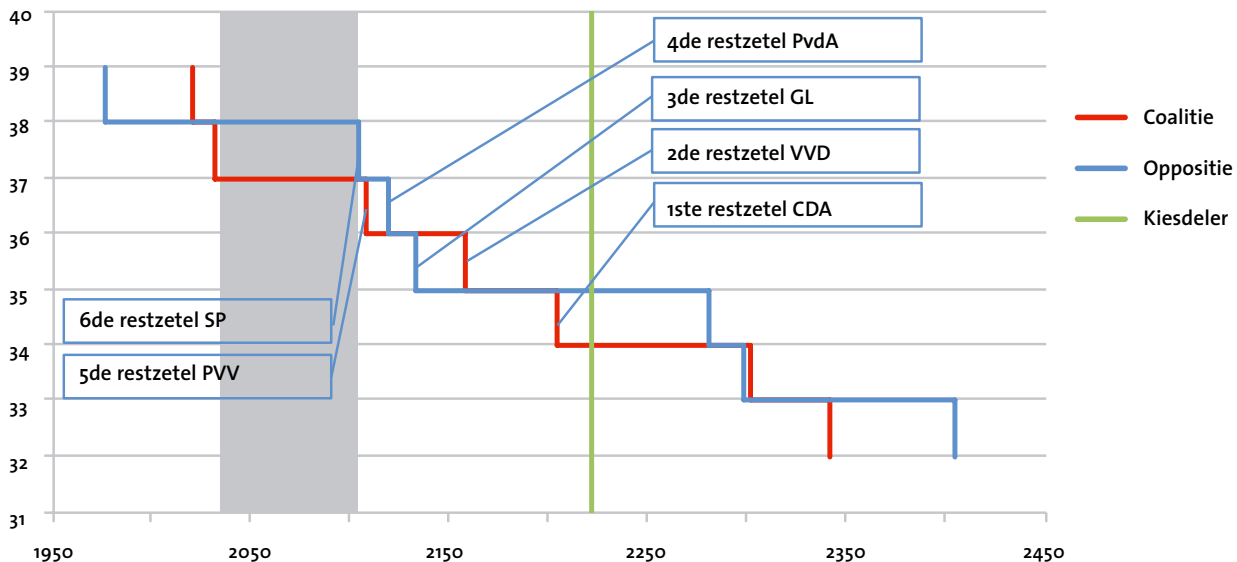
Door het kiezen van een andere stemstrategie kan een groep partijen de eigen curve beïnvloeden. Als bijvoorbeeld het CDA een stem, en daarmee stemwaarde, aan de PVV geeft zal de trede 5de restzetel PVV naar rechts verschuiven, maar

de trede 1ste restzetel CDA schuift juist naar links. De kans op een restzetel voor de PVV zou hiermee mogelijk verbeteren omdat het stemcijfer per zetel wordt verhoogd. Echter, de kans op een restzetel voor het CDA zal verslechteren.

Wiskundig model

Om een optimale strategie te bepalen voor een groep partijen G modelleren we het probleem als volgt. Laat variabele X_{pij} het aantal stemmen zijn dat in provincie p door partij i uitgebracht is op partij j , en laat ω_p de stemwaarde zijn in provincie p . Dan is het verkregen stemcijfer van partij j gelijk aan $\sum_{p,i} \omega_p X_{pij}$. Laat variabele D de deler zijn en de variabele Z_j het behaalde aantal zetels van partij j . Met α_{pi} geven we het aantal statenleden aan dat partij i in provincie p heeft. De randvoorwaarden zijn als volgt. Er zijn 75 zetels te verdelen; $\sum_j Z_j = 75$. Het aantal stemmen uitgebracht komt overeen met het aantal statenleden; $\sum_j X_{pij} = \alpha_{pi}$. Het stemcijfer geeft een boven- en ondergrens op het aantal zetels van een partij;

$$Z_j \leq \frac{\sum_{p,i} \omega_p X_{pij}}{D} < Z_{j+1}.$$



Figuur 2. Het aantal aan een partij toe te wijzen zetels uitgezet tegen de deler

Nu we dit model geformuleerd hebben, lopen we tegen twee dingen aan. Wat te doen met het wiskundig gezien moeilijk oplosbare kwadratisch probleem en wat is de strategie van de partijen die niet in groep G zitten? De sleutel voor beide problemen zit in het tijdelijk vastzetten van de deler.

Door het vastzetten van de deler wordt het model lineair en eenvoudiger om op te lossen. We laten daarmee tijdelijk de eis vallen dat 75 zetels verdeeld moeten worden. Worden er minder dan 75 verdeeld, dan is de deler klaarblijkelijk te hoog gekozen. En als er meer dan 75 worden verdeeld, dan is de deler te laag gekozen. Een *binary search* op de deler leidt snel tot een goede keuze.

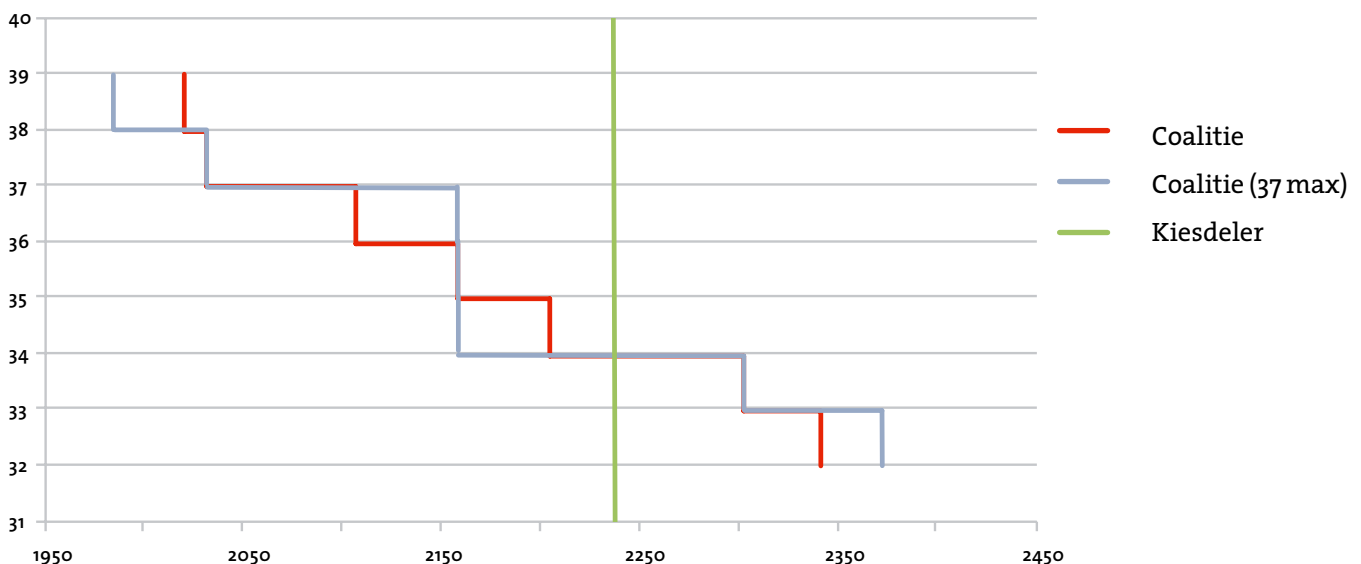
Voor een gegeven deler kan een groep partijen nu haar beste strategie bepalen, onafhankelijk van de strategie van de anderen. Of bij die deler precies 75 zetels worden verdeeld, is echter wel afhankelijk van de strategie van de andere partijen.

Laat de parameter β_{ij} gelijk zijn aan 1 als partijen i en j tot dezelfde groep en 0 als dat niet zo is. En als we de variabele voor de deler D vervangen door een vast getal δ , wordt het ILP model als volgt:

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \sum_j z_j \\ & \text{s.t. } \sum_j X_{pij} = \alpha_{pi} \quad \forall p,i, \\ & X_{pij} \leq \alpha_{pi} \beta_{ij} \quad \forall p,i,j, \\ & z_j \leq \frac{\sum_{p,i} \omega_p X_{pij}}{\delta} \quad \forall j \\ & X_{pij}, z_j \text{ integer.} \end{aligned}$$

Uitkomsten

Zoals eerder geschetst kan de gedoogcoalitie haar kans op een 37ste zetel (de restzetel van de PVV) verstevigen door een deel van het stemcijfer van het CDA naar de PVV te verschuiven. Zoeken naar de grootste waarde van δ waarvoor de gedoogcoalitie 37 zetels kan halen, levert de strategie op die staat afgebeeld in figuur 3. In deze strategie gaat een stemwaarde van 506 van het CDA naar de PVV, door in de provincie Zuid-Holland één CDA-er te laten stemmen op de PVV en omgekeerd in de provincie Groningen één PVV-er op het CDA.



Figuur 3. Strategie voor het vinden van de grootste waarde van δ waarvoor de gedoogcoalitie 37 zetels kan halen

Voor elk zetelaantal kan gezocht worden naar een strategie die bij een zo groot mogelijke waarde van δ dat zetelaantal behaalt. Ofwel, elk zetelaantal heeft een sterkste strategie voor het halen van dat aantal zetels. Het resultaat staat weergegeven in figuur 4 als *Coalitie (X max)*; het maximaal haalbare zetelaantal gegeven een deler. In de vorige grafieken correspondeerde een lijn met één strategie, maar deze lijn correspondeert met het maximaal haalbare over alle mogelijke strategieën. De strategie verschilt dus per trede in de grafiek.

Voor de oppositie kan een vergelijkbare analyse gemaakt worden. Het lijkt politiek gezien niet realistisch om de oppositie als één grote samenwerkende groep te beschouwen. Ter illustratie kiezen we hier voor vier subgroepen; Groep 1 bestaat uit PvdA, SP, D66 en GroenLinks, groep 2 uit ChristenUnie en SGP, groep 3 uit alleen PvdD en groep 4 uit 50PLUS en OSF. Binnen deze beperking is het maximaal haalbare voor de oppositie afgebeeld in figuur 4, naast het eerder bepaalde maximaal haalbare voor de coalitie.

Als alle partijen, gegeven deze groepsindeling, de beste strategie volgen zal de coalitie 36 zetels krijgen en de oppositie 39 zetels. Het valt op dat

bij optimale strategieën de 74ste en 75ste zetel worden verdeeld bij delers die heel dicht bij de officiële kiesdeler liggen.

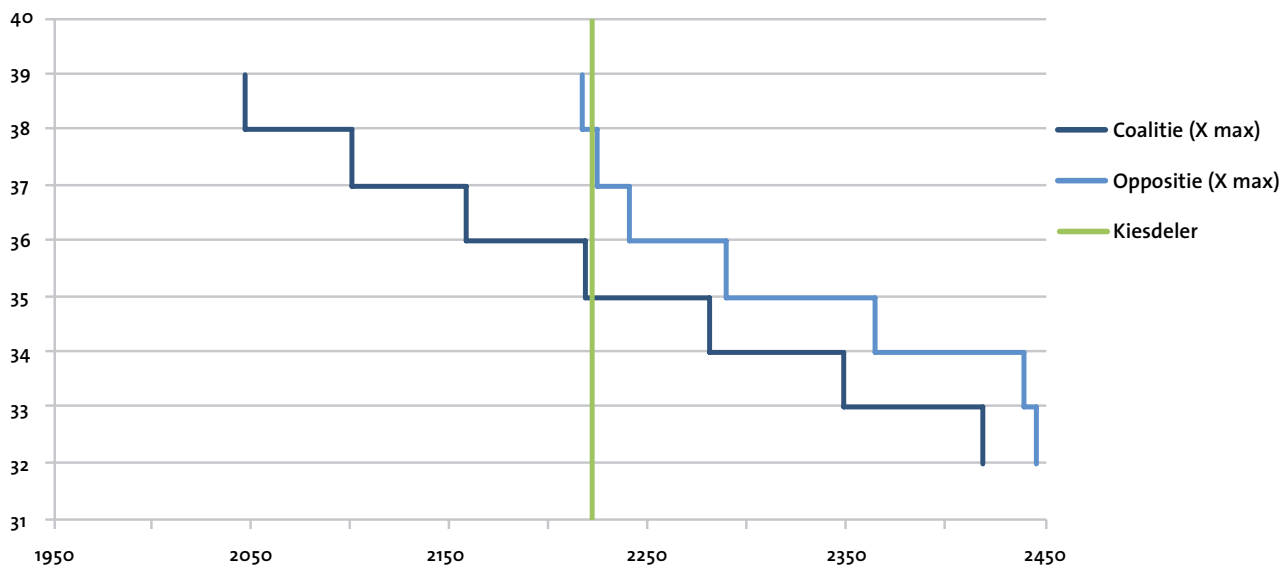
Open eindjes

De wiskundige kant van de verkiezing is hiermee belicht, er zijn echter nog wat losse eindjes. Een bewijs van NP-compleetheid en het bestaan van een puur Nash evenwicht zijn waarschijnlijk niet moeilijk te geven. Echter, groepsindelingen en stemafspraken zijn politieke kwesties, die ongetwijfeld veel moeilijker zijn dan de beschreven wiskunde.

LITERATUUR

1. NOS dossier *Strijd om de Eerste Kamer*: <http://nos.nl/dossier/210939-eerste-kamerverkiezingen-2011/thema/serie-strijd-om-de-eerste-kamer/>
2. Eén Vandaag uitzending *Verkiezingen een strijd op landelijk niveau*, 17 februari 2011: <http://beta.uitzendinggemist.nl/afleveringen/1062892>
3. Website Eerste Kamer: www.eerstekamer.nl/
4. Website Kiesraad: www.kiesraad.nl/

JACOB JAN PAULUS en JAAP PRAAGMAN zijn beiden werkzaam bij *Consultants in Quantitative Methods (CQM)*. E-mail: <paulus@cqm.nl> & <praagman@cqm.nl>



Figuur 4. Het maximaal haalbare zetelaantal gegeven een deler